3.5.18 Množiny

Předpoklady: 030501

Př. 1: Kolik lidí může v souladu s předpisy cestovat v běžném osobním autě (například Škoda Octavia)? Hledej různé způsoby, jak odpověď vyjádřit.

1. způsob: Autem může cestovat 1 nebo 2 nebo 3 nebo 4 nebo 5 lidí.
2. způsob: Autem může cestovat alespoň jeden, ale méně než 6 lidí.

1. způsob: Vypsali jsme všechny možnosti - **Výčet**.

2. způsob: Napsali jsme vlastnosti, které mají všechna hledaná čísla (a nemá je žádné jiné číslo) - **společná vlastnost**.

Oběma způsoby jsme popsali to samé: skupinu čísel, kterou v matematice označujeme jako **množinu**. Množiny patří v matematice k nejdůležitějším pojmům, v tomto okamžiku se však jimi nebudeme příliš zabývat.

Dodatek: Přesná definice množiny je poměrně složitá a zcela mimo možnosti dokonce i středoškolské matematiky.

Množinu možných počtů cestujících výčtem zapisujeme pomocí složených závorek: $P = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.
Skutečnost, že číslo 4 patří do množiny *P*, se zapisuje pomocí speciálního znaku $\in$ "náleží" takto: $4 \in P$ ("číslo 4 náleží do množiny *P*" nebo "číslo 4 je prvkem množiny *P*).

S množinami jsme se již setkali, když jsme mluvili o různých druzích čísel. Tyto množiny označujeme pomocí speciálních písmen:

- množina přirozených čísel: *N*,
- množina celých čísel: *Z*,
- množina racionálních čísel: *Q*,
- množina reálných čísel: *R*.

Dodatek: V učebnicích se často místo normálních písmen používají speciálně proložená písmena $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. V této učebnici používáme normální běžná velká tiskací.

Př. 2: Vysvětli, co znamenají následující zápisy. Které z nich jsou pravdivé?

a) $2 \in P$ b) $10 \notin P$ c) $-3 \notin N$ d) $\frac{2}{3} \in Z$ e) $-\pi \in R$

a) $2 \in P$: číslo 2 je prvek množiny *P*. Pravda.

b) $10 \notin P$: číslo 10 není prvkem množiny *P*. Pravda.

c) $-3 \notin N$: číslo -3 není prvek množiny *P*. Pravda.

d) $\frac{2}{3} \in Z$: číslo $\frac{2}{3}$ není prvkem množiny celých čísel. Nepravda.

e) $-\pi \in R$: číslo $-\pi$ je prvek množiny reálných čísel. Pravda.

Př. 3: Jaká čísla můžeme dosadit za neznámou *y*, pokud platí $y \in P$?

Za neznámou *y* můžeme dosadit všechna čísla, která náleží do množiny *P* (tedy čísla $1;3;4;5$).

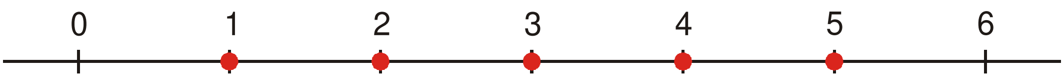
Př. 4: Najdi všechna čísla *x*, pro která platí: $x \in P$ a zároveň $|x| > 2$.

Jde o čísla $3; 4; 5$.

Matematickými symboly je možné zapsat množinu *P* i pomocí **společné vlastnosti** pomocí nerovností: $P = \{x \in N; 1 \leq x < 6\}$ (čteme: množina *P* se skládá z přirozených čísel, která jsou větší nebo rovna jedné a jsou menší než 6).
Skutečnost, že do množiny *P* můžeme zařadit pouze přirozená čísla, jsme mlčky předpokládali, protože necelé nebo záporné počty pasažérů autem přepravovat (za normálních okolností) nelze.

Množiny můžeme (často velmi výhodně) znázorňovat na číselné ose.

Př. 5: Znázorni na číselné ose množinu všech možných počtů cestujících v běžném osobním autě.



Př. 6: Zapiš množiny výčtem. Všechny také znázorni na číselné ose.
a) $A = \{x \in N; 5 < x < 9\}$
b) $B = \{x \in Z; -3 < x \leq 3\}$
c) $C = \{x \in Z; |x| < 3\}$
d) $D = \{x \in N; x \geq -2\}$
e) $E = \{x \in Z; 3 < x < 2\}$

a) $A = \{x \in N; 5 < x < 9\}$
Hledáme přirozená čísla větší než 5 a menší než 9 $\Rightarrow$ $A = \{6;7;8\}$.

b) $B = \{x \in Z; -3 < x \leq 3\}$
Hledáme celá čísla větší než -3 a menší nebo rovna 3 $\Rightarrow$ $B = \{-2;-1;0;1;2;3\}$.

c) $C = \{x \in Z; |x| < 3\}$
Hledáme celá čísla, jejichž absolutní hodnota je menší než 3 $\Rightarrow$ $C = \{-2;-1;0;1;2\}$.

d) $D = \{x \in N; x \geq -2\}$

Hledáme přirozená čísla větší než –2, taková jsou všechna $\Rightarrow$ $D = N$.

e) $E = \{x \in Z; 3 < x < 2\}$
Hledáme celá čísla větší než 3 a menší než 2, žádná taková nejsou $\Rightarrow$ $E = \emptyset$.

Př. 7: Zapiš množiny společnou vlastností pomocí nerovností.
a) $F = \{3;4;5\}$ b) $G = \{-1;0;1\}$ c) $H = \{-3;-2;-1;0;1\}$

a) $F = \{3;4;5\}$
Množina všech přirozených čísel větších než 2 a menších než 6 ($F = \{x \in N; 2 < x < 6\}$).

b) $G = \{-1;0;1\}$
Množina všech celých čísel, jejichž absolutní hodnota je menší nebo rovna 1
($G = \{x \in Z; |x| \le 1\}$).

c) $H = \{-3;-2;-1;0;1\}$
Množina všech celých čísel větších než -4 a menších než 2 ($H = \{x \in Z; -4 < x < 2\}$).

Př. 8: Zapiš množiny výčtem. Najdi pro ně srozumitelnější slovní vyjádření.
a) $S = \{x = 2k; k \in N; 3 < k < 8\}$ b) $T = \{x = 3k; k \in N; 3 \le x < 12\}$
c) $U = \{x = 4k+1; k \in N; 3 \le x < 21\}$

a) $S = \{x = 2k; k \in N; 3 < k < 8\}$
Hodnoty pro neznámou *x* můžeme vypočítat dosazováním za neznámou *k*, pro kterou vybíráme hodnoty $k \in \{4; 5; 6; 7\}$. Získáme tak čísla: $8; 10; 12; 14$. Množinu *S* představují sudá čísla větší než 7 a menší než 15.

b) $T = \{x = 3k; k \in N; 3 \le x < 12\}$
Hodnoty pro neznámou *x* můžeme vypočítat dosazováním za neznámou *k*, pro kterou vybíráme hodnoty $k \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Získáme tak část násobků tří od čísla 9 do čísla $3 \cdot 12 = 36$. Množinu *T* představují násobky tří větší než 8 a menší než 37.

c) $U = \{x = 4k+1; k \in N; 3 \le x < 21\}$
Zkusíme spočítat několik hodnot:

- $k = 3$: $x = 4k+1 = 4 \cdot 3 + 1 = 13$,
- $k = 4$: $x = 4k+1 = 4 \cdot 4 + 1 = 17$,
- …
- $k = 20$: $x = 4k+1 = 4 \cdot 20 + 1 = 81$.

Získáváme čísla, která při dělení číslem 4 dávají zbytek 1. Množinu *U* představují čísla, která při dělení číslem 4 dávají zbytek 1 a jsou větší než 12 a menší než 82.

Př. 9: Jirka psal test. Za každou správnou odpověď získal jeden kladný bod, za každou špatnou odpověď mu byl jeden bod odečten. Za otázky, na které neodpověděl, se mu žádné body ani nepřidávaly, ani neodečítaly. Kolik mohl získat za test celkem bodů, pokud na začátek dostal 3 body a test obsahoval 5 otázek? Výsledek zapiš výčtem i vlastností.

- Nejvyšší možný počet bodů: 5 správně zodpovězených otázek a 3 body ze začátku: $5 \cdot 1 + 3 = 8$ bodů.
- Nejnižší možný počet bodů: 5 špatně zodpovězených otázek a 3 body ze začátku: $5 \cdot (-1) + 3 = -2$ body.

Možné počty bodů výčtem: $B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Možné počty bodů společnou vlastností: $B = \{x \in Z; -2 \le x \le 8\}$.

Pedagogická poznámka: V tomto okamžiku nikdo neřeší, zda je opravdu možné všech bodových hodnot dosáhnout (v tomto případě to možné je, protože u každého výsledku můžeme realizovat nejednodušší cestu – odpovídající počet správných nebo špatných odpovědí a zbytek otázek nezodpovězených). V následujícím příkladu už to problém je, ale většinou si ho nikdo nevšimne. Závěrečný rozbor pak samozřejmě není práce do školy, ale pro zájemce na doma.

Př. 10: Martin psal test. Za každou správnou odpověď získal dva kladné body, za každou špatnou odpověď mu byl jeden bod odečten. Za otázky, na které neodpověděl, se mu žádné body ani nepřidávaly, ani neodečítaly. Kolik mohl získat za test celkem bodů, pokud na začátek dostal 6 bodů a test obsahoval 6 otázek? Výsledek zapiš výčtem i vlastností a vyznač ho na číselné ose.

Zkusíme opět spočítat nejvyšší a nejnižší možný počet bodů:

- Nejvyšší možný počet bodů: 6 správně zodpovězených otázek a 6 bodů na začátku: $6 \cdot 2 + 6 = 18$ bodů.
- Nejnižší možný počet bodů: 6 špatně zodpovězených otázek a 6 bodů ze začátku: $6 \cdot (-1) + 6 = 0$ body.

Zdá se, že možné konečné počty bodů odpovídají všem číslům od 0 do 18.

Zkusíme ověřit, zda je možné získat 17 bodů. Druhý nejlepší možný výsledek testu: 5 správných odpovědí, jedna nezodpovězená otázka: $5 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 6 = 16$ $\Rightarrow$ není možné získat 17 bodů.

$\Rightarrow$ Pokud chceme zjistit všechny možné počty bodů, musíme buď:

- ke každému číslu zkusit najít odpovídající výsledek testu (čísla, u kterých se to nepodaří, pak jako možné výsledky vyloučíme),
- prozkoumat všechny výsledky testů a ke každému spočteme výsledný počet bodů.

Druhá možnost velice náročná: v každé otázce jsou tři možné odpovědi $\Rightarrow$ celkem $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ možných výsledků.

Zkusíme první možnost (zbývá prozkoumat už pouze 16 možných hodnot):

- 15: 5 správných odpovědí, jedna špatně zodpovězená otázka: $5 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 6 = 15$ $\Rightarrow$ 15 je jedním z možných konečných výsledků,
- 14: 4 správné odpovědi, dvě nezodpovězené otázky: $4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 6 = 14$ $\Rightarrow$ 14 je jedním z možných konečných výsledků,

- 13: 4 správné odpovědi, jedna nezodpovězená otázka, jedna špatně zodpovězená otázka: $4\cdot 2+1\cdot 0+1\cdot(-1)+6=13 \Rightarrow$ 13 je jedním z možných konečných výsledků,
- 12: 4 správné odpovědi, dvě špatně zodpovězené otázky: $4\cdot 2+2\cdot(-1)+6=12 \Rightarrow$ 12 je jedním z možných konečných výsledků,
- 11: 3 správné odpovědi, 2 nezodpovězené otázky, 1 špatná odpověď: $3\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot(-1)+6=11 \Rightarrow$ 11 je jedním z možných konečných výsledků,
- 10: 3 správné odpovědi, 1 nezodpovězená otázka, 2 špatné odpovědi: $3\cdot 2+1\cdot 0+2\cdot(-1)+6=10 \Rightarrow$ 10 je jedním z možných konečných výsledků,
- 9: 3 správné odpovědi, 3 špatné odpovědi: $3\cdot 2+3\cdot(-1)+6=9 \Rightarrow$ 9 je jedním z možných konečných výsledků,
- 8: 2 správné odpovědi, 2 nezodpovězené otázky, 2 špatné odpovědi: $2\cdot 2+2\cdot 0+2\cdot(-1)+6=8 \Rightarrow$ 8 je jedním z možných konečných výsledků,
- 7: 2 správné odpovědi, 1 nezodpovězená otázka, 3 špatné odpovědi: $2\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot(-1)+6=7 \Rightarrow$ 7 je jedním z možných konečných výsledků,
- 6: 1 správná odpověď, 3 nezodpovězené otázky, 2 špatné odpovědi: $1\cdot 2+3\cdot 0+2\cdot(-1)+6=6 \Rightarrow$ 6 je jedním z možných konečných výsledků,
- 5: 1 správná odpověď, 2 nezodpovězené otázky, 3 špatné odpovědi: $1\cdot 2+2\cdot 0+3\cdot(-1)+6=5 \Rightarrow$ 5 je jedním z možných konečných výsledků,
- 4: 1 správná odpověď, 1 nezodpovězená otázka, 4 špatné odpovědi: $1\cdot 2+1\cdot 0+4\cdot(-1)+6=4 \Rightarrow$ 4 je jedním z možných konečných výsledků,
- 3: 0 správných odpovědí, 3 nezodpovězené otázky, 3 špatné odpovědi: $0\cdot 2+3\cdot 0+3\cdot(-1)+6=3 \Rightarrow$ 3 je jedním z možných konečných výsledků,
- 2: 0 správných odpovědí, 2 nezodpovězené otázky, 4 špatné odpovědi: $0\cdot 2+2\cdot 0+4\cdot(-1)+6=2 \Rightarrow$ 2 je jedním z možných konečných výsledků,
- 1: 0 správných odpovědí, 1 nezodpovězená otázka, 5 špatných odpovědí: $0\cdot 2+1\cdot 0+5\cdot(-1)+6=1 \Rightarrow$ 1 je jedním z možných konečných výsledků.

Možné počty bodů výčtem: $B=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;18\}$.

Dodatek: Skutečnost, že všechny další možnosti počtu bodů menšího než 17 jsou možné, se dá zdůvodnit i bez vypisování takto:
Pokud jednu nezodpovězenou otázku změníme na špatně odpovězenou, zmenší se bodový výsledek o jedna.
Pokud jednu správně zodpovězenou otázku a jednu špatně zodpovězenou otázku změníme na nezodpovězenou otázku, zmenší se bodový výsledek o jedna.
Jedním z uvedených způsobů můžeme zmenšit bodový výsledek o jedna, pokud nejsou všechny otázky zodpovězené správně (ve výsledku, který chceme měnit, potřebujeme alespoň jednu špatně zodpovězenou nebo jednu nezodpovězenou otázku).

Shrnutí: Množiny (skupiny prvků) můžeme vyjadřovat výčtem nebo pomocí společné vlastnosti.